



# *CINEMÁTICA DEL ROBOT*

---

- Cinemática Directa
- Cinemática Inversa
- Matriz Jacobiana



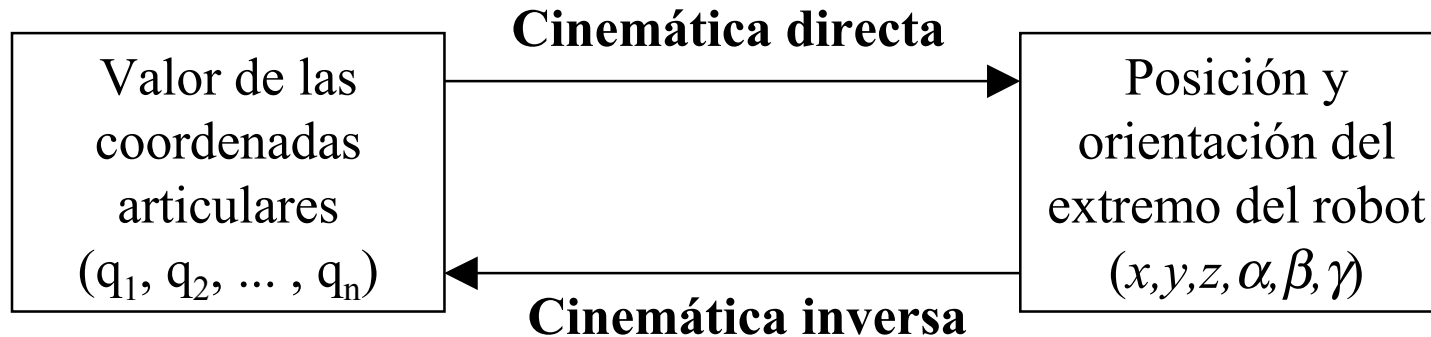
# *Problema cinemático del robot*

---

- **Cinemática del robot:** Estudio de su movimiento con respecto a un sistema de referencia:
  - Descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo.
  - Relaciones entre la posición y orientación del extremo del robot (localización) y los valores de sus coordenadas articulares.
- **Problema cinemático directo:** Determinar la posición y orientación del extremo del robot, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.
- **Problema cinemático inverso:** Determinar la configuración que debe adoptar el robot para alcanzar una posición y orientación conocidas.
- **Modelo diferencial** (matriz Jacobiana): Relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo del robot.



## Relación entre cinemática directa e inversa



$$q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$q_2 = f_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

· ·

· ·

· ·

$$q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$x = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

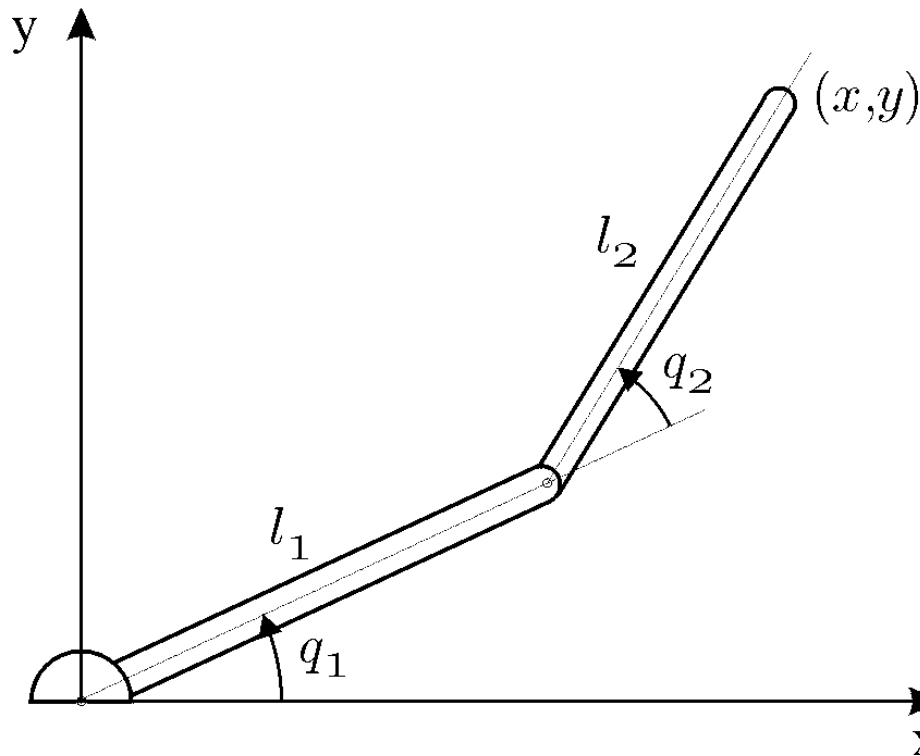
$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)$$



## Obtención del modelo cinemático directo (I)

- **Mediante relaciones geométricas:**
  - Robots con pocos grados de libertad.
  - No es un método sistemático.



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$
$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$



## *Obtención del modelo cinemático directo (II)*

---

- **Mediante matrices de transformación homogénea:**
  - A cada eslabón se le asocia un sistema de referencia solidario.
  - Es posible representar las traslaciones y rotaciones relativas entre los distintos eslabones.
  - La matriz  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot.
  - Representación total o parcial de la cadena cinemática del robot:
    - ${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$
    - $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_6 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 {}^3\mathbf{A}_4 {}^4\mathbf{A}_5 {}^5\mathbf{A}_6$
  - Existen métodos sistemáticos para situar los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón y obtener la cadena cinemática del robot.



## Representación de Denavit-Hartenberg (D-H)

- Permite el paso de un eslabón al siguiente mediante 4 transformaciones básicas, que dependen exclusivamente de las características constructivas del robot.
- Las transformaciones básicas que relacionan el sistema de referencia del elemento  $i$  con el sistema del elemento  $i-1$  son:
  - 1.- Rotación  $\theta_i$  alrededor del eje  $z_{i-1}$ .
  - 2.- Traslación  $d_i$  a lo largo del eje  $z_{i-1}$ .
  - 3.- Traslación  $a_i$  a lo largo del eje  $x_i$ .
  - 4.- Rotación  $\alpha_i$  alrededor del eje  $x_i$ .

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\mathbf{A}_i &= \mathbf{T}(z, \theta_i)\mathbf{T}(0, 0, d_i)\mathbf{T}(a_i, 0, 0)\mathbf{T}(x, \alpha_i) \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## *Algoritmo de Denavit-Hartenberg (I)*

---

- Numerar los eslabones comenzando con  $1$  (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con  $n$  (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón  $0$  a la base fija del robot.
- Numerar cada articulación comenzando por  $1$  (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en  $n$ .
- Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
- Para  $i$  de  $0$  a  $n-1$  situar el eje  $z_i$  sobre el eje de la articulación  $i+1$ .
- Situar el origen del sistema de la base  $\{S_0\}$  en cualquier punto del eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  e  $y_0$  se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con  $z_0$ .



## Algoritmo de Denavit-Hartenberg (II)

---

- Para  $i$  de  $1$  a  $n-1$ , situar el sistema  $\{S_i\}$  (solidario al eslabón  $i$ ) en la intersección del eje  $z_i$  con la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si ambos ejes se cortasen se situaría  $\{S_i\}$  en el punto de corte. Si fuesen paralelos  $\{S_i\}$  se situaría en la articulación  $i+1$ .
- Para  $i$  de  $1$  a  $n-1$ , situar  $x_i$  en la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
- Para  $i$  de  $1$  a  $n-1$ , situar  $y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $x_i$  y  $z_i$ .
- Situar el sistema  $\{S_n\}$  en el extremo del robot de modo que  $z_n$  coincida con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  sea normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ .
- Obtener  $\theta_i$  como el ángulo que hay que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- Obtener  $d_i$  como la distancia, medida a lo largo de  $z_{i-1}$ , que habría que desplazar  $\{S_{i-1}\}$  para que  $x_i$  y  $x_{i-1}$  quedasen alineados.





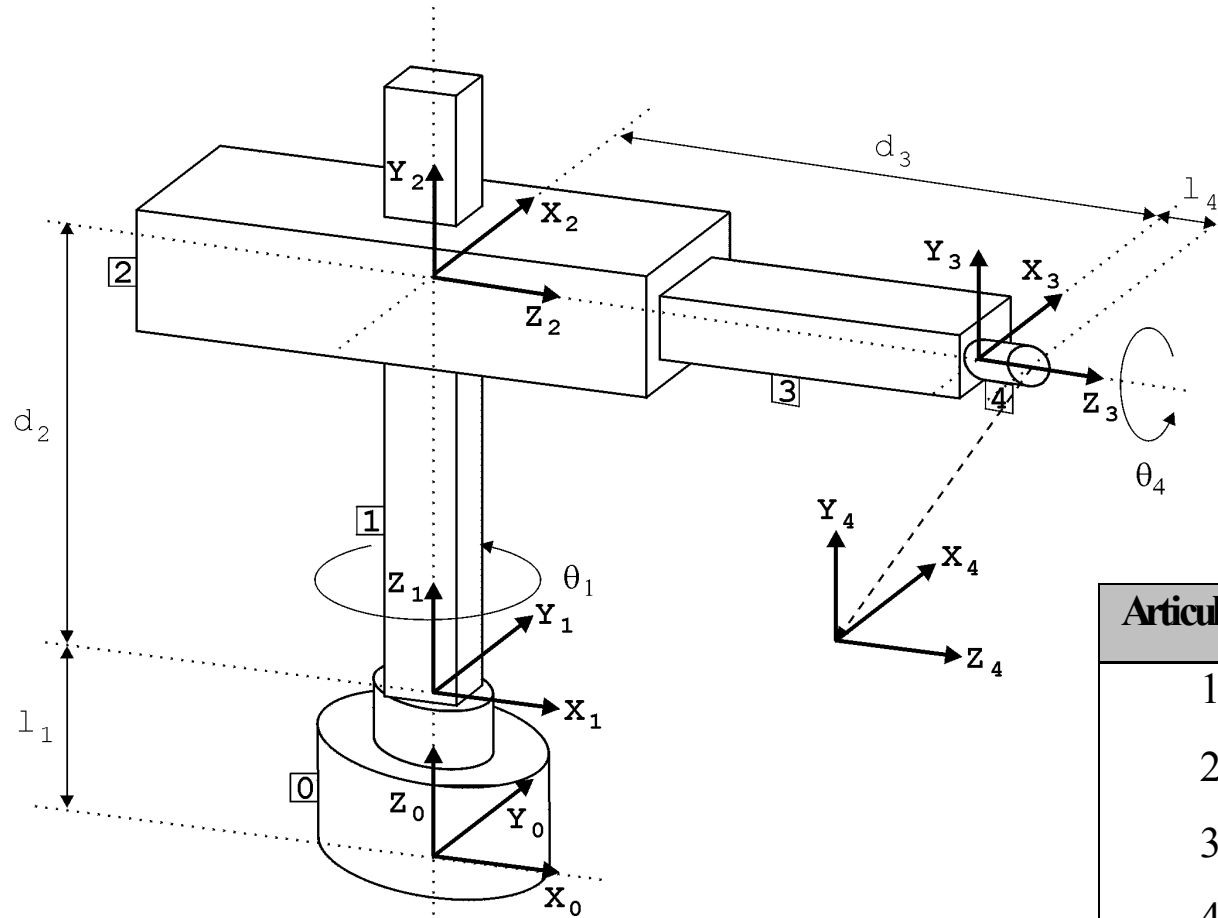
## *Algoritmo de Denavit-Hartenberg (III)*

---

- Obtener  $a_i$  como la distancia medida a lo largo de  $x_i$ , que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ , que habría que desplazar el nuevo  $\{S_{i-1}\}$  para que su origen coincidiese con  $\{S_i\}$ .
- Obtener  $\alpha_i$  como el ángulo que habría que girar en torno a  $x_i$ , que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ , para que el nuevo  $\{S_{i-1}\}$  coincidiese totalmente con  $\{S_i\}$ .
- Obtener las matrices de transformación  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ .
- Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot  $\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{A}_n$ .
- La matriz  $\mathbf{T}$  define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referidas a la base en función de las  $n$  coordenadas articulares.



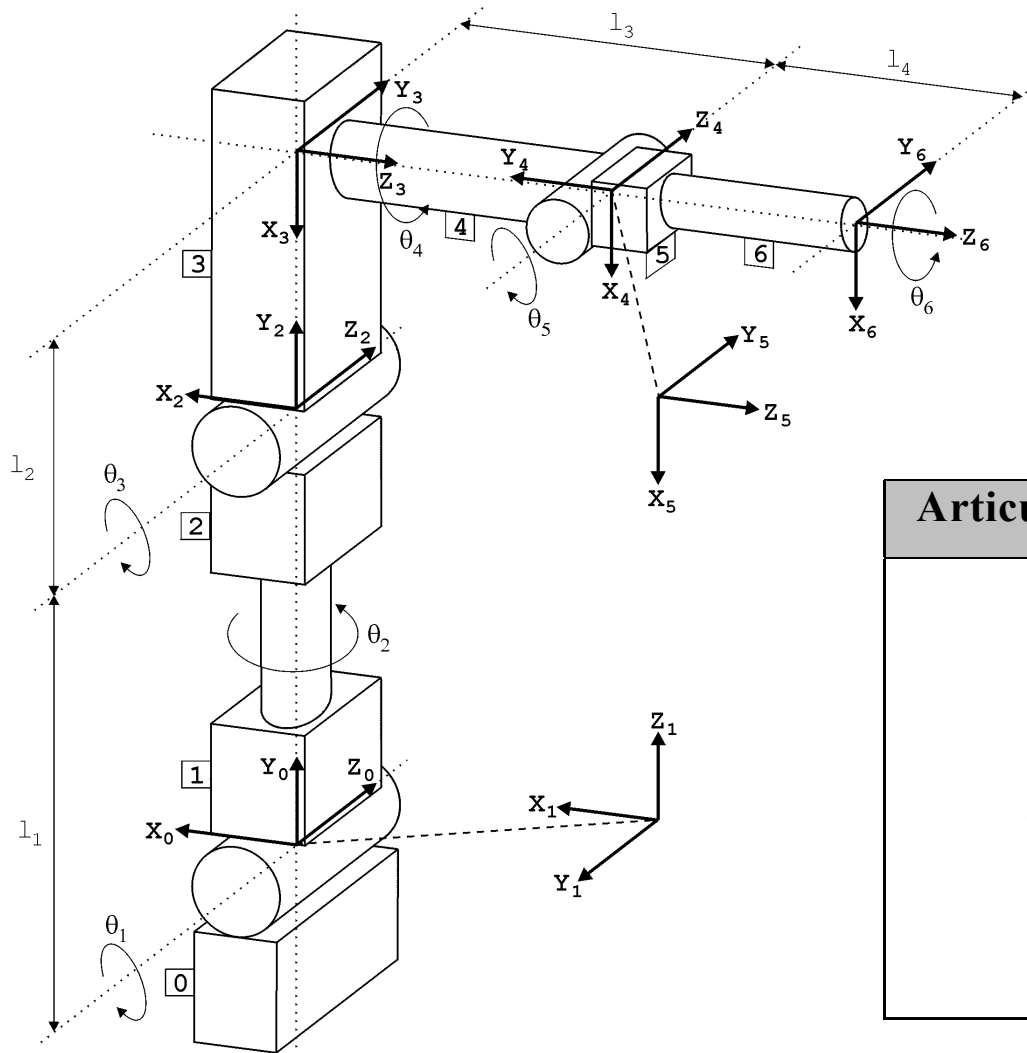
# Modelo cinemático directo: Ejemplos (I)



Articulación	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	$\theta_1$	$l_1$	0	0
2	$90$	$d_2$	0	$90$
3	0	$d_3$	0	0
4	$\theta_4$	$l_4$	0	0



# Modelo cinemático directo: Ejemplos (II)



Articulación	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	$\theta_1$	0	0	-90
2	$\theta_2$	$l_1$	0	90
3	$\theta_3 - 90$	0	$-l_2$	90
4	$\theta_4$	$l_3$	0	-90
5	$\theta_5$	0	0	90
6	$\theta_6$	$l_4$	0	0



## *Problema cinemático inverso*

---

- El **objetivo** del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot,  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.
- La resolución no es sistemática: Depende de la configuración del robot y pueden existir soluciones múltiples.
- Solución cerrada:

$$q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

- Posibilidad de resolución en tiempo real.
- Posibilidad de incluir restricciones que garanticen la mejor solución.
- Posibilidad de simplificaciones.
- No siempre existe.



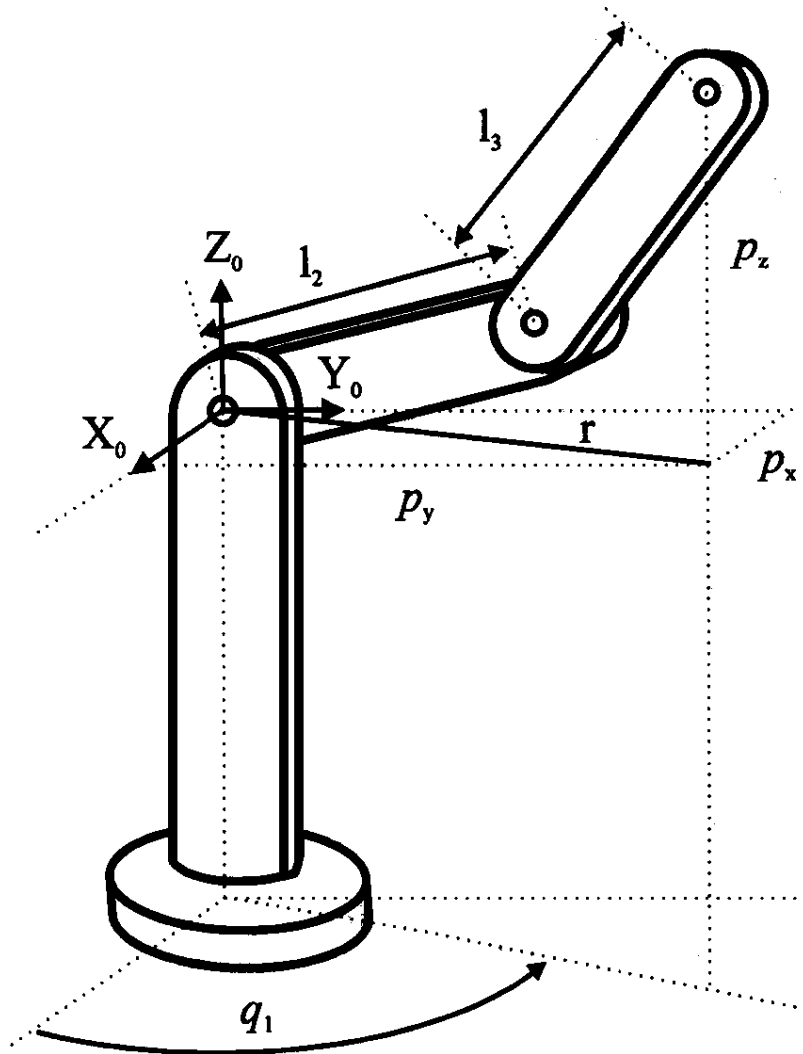
# *Obtención del modelo cinemático inverso*

---

- **Métodos geométricos:**
  - Se suele utilizar para obtener los valores de las primeras variables articulares, que son las que posicionan el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo).
  - Utilizan relaciones geométricas y trigonométricas sobre los elementos del robot.
- **Matrices de transformación homogénea:**
  - Despejar las  $n$  variables  $q_i$  en función de las componentes de los vectores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{p}$ .
- **Desacoplo cinemático:**
  - Para determinados robots con 6 grados de libertad.
  - Resolución independiente de los grados de libertad que posicionan y de los que orientan.



# Resolución por métodos geométricos (I)



$$q_1 = \arctan \left( \frac{p_y}{p_x} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \cos q_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

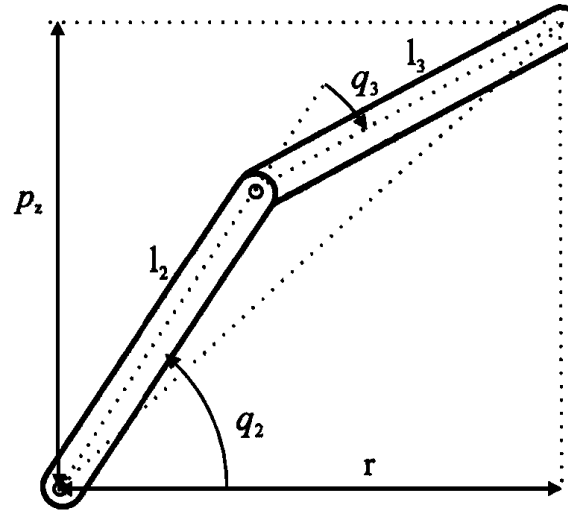
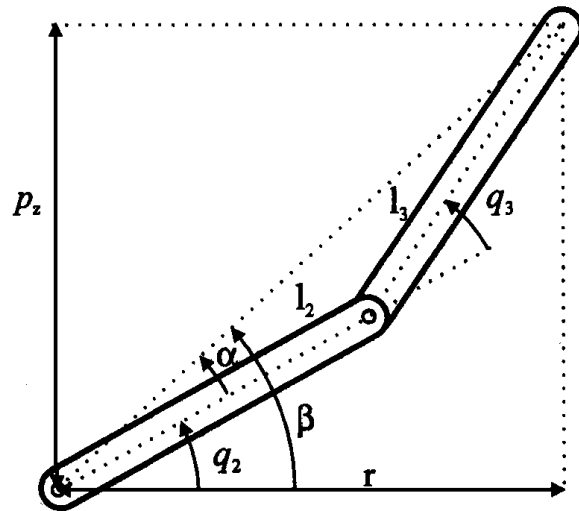
$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \arctan \left( \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3} \right)$$



## Resolución por métodos geométricos (II)



$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right)$$

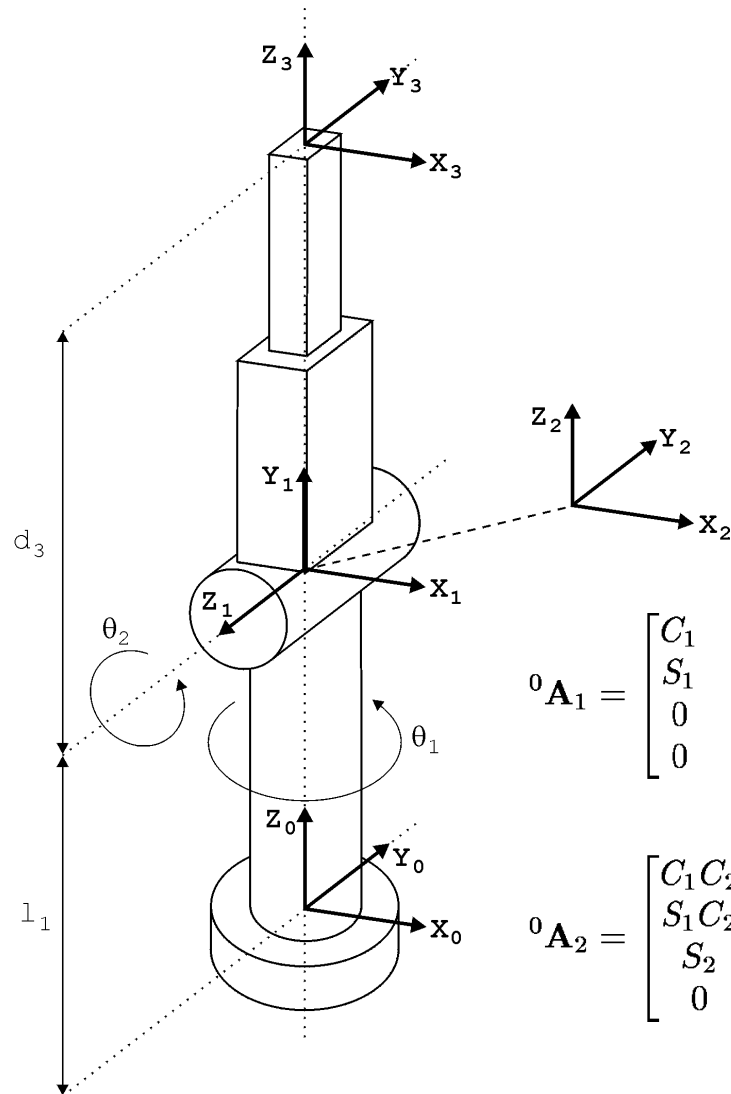
$$= \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$



# Resolución por matrices de transformación (I)



Articulación	$\theta$	d	a	$\alpha$
1	$\theta_1$	$l_1$	0	90
2	$\theta_2$	0	0	-90
3	0	$d_3$	0	0

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & -C_1 S_2 & 0 \\ S_1 C_2 & C_1 & -S_1 S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & -C_1 S_2 & -d_3 C_1 S_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & -S_1 S_2 & -d_3 S_1 S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & d_3 C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





## Resolución por matrices de transformación (II)

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & -S_2 d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eligiendo el elemento (3,4):

$$S_1 p_x - C_1 p_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_1 = \left( \frac{p_y}{p_x} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_1 = \arctan \left( \frac{p_y}{p_x} \right)}$$



## Resolución por matrices de transformación (III)

$${}^1\mathbf{A}_2)^{-1} ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2C_1 & C_2S_1 & S_2 & -l_1S_2 \\ -S_1 & C_1 & 1 & 0 \\ -S_2C_1 & -S_2S_1 & C_2 & -l_1C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elijiendo el elemento (1,4):

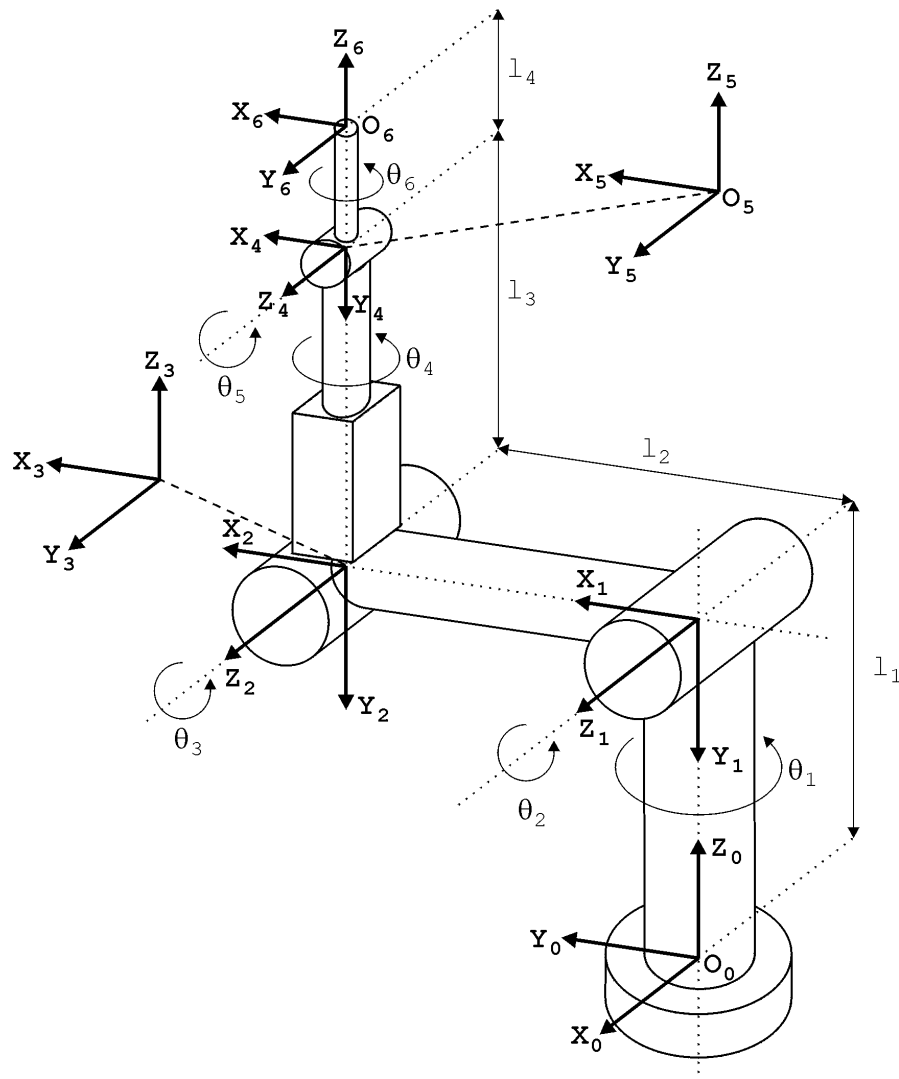
$$C_2C_1p_x + C_2S_1p_y + S_2p_z - l_1S_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \arctan -\frac{C_1p_x + S_1p_y}{p_z - l_1}}$$

Elijiendo el elemento (3,4):

$$-S_2C_1p_x - S_2S_1p_y + C_2p_z - C_2l_1 = d_3 \Rightarrow \boxed{\mathbf{d}_3 = C_2(p_z - l_1) - S_2(C_1p_x + S_1p_y)}$$



# Resolución por desacoplo cinemático (I)



Articulación	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	$\theta_1$	$l_1$	0	-90
2	$\theta_2$	0	$l_2$	0
3	$\theta_3$	0	0	90
4	$\theta_4$	$l_3$	0	-90
5	$\theta_5$	0	0	90
6	$\theta_6$	$l_4$	0	0

$$\mathbf{p}_m = \overline{O_0 O_5} \Rightarrow \mathbf{p}_m = \mathbf{p}_r - l_4 \mathbf{z}_6$$

$$\mathbf{p}_r = \overline{O_0 O_6}$$

$$\mathbf{p}_r = [p_x, p_y, p_z]^T; \quad \mathbf{z}_6 = [a_x, a_y, a_z]^T$$

$$\mathbf{p}_m = \begin{pmatrix} p_{mx} \\ p_{my} \\ p_{mz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - l_4 a_x \\ p_y - l_4 a_y \\ p_z - l_4 a_z \end{pmatrix}$$



## Resolución por desacoplo cinemático (II)

$${}^0\mathbf{R}_6 = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$$

$${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}] = ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$$

$${}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 = ({}^3\mathbf{R}_4)^T ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}] \Rightarrow \boxed{\theta_4 = \arctan \frac{C_1 a_y - S_1 a_x}{C_{23}(C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{23} a_z}}$$

$${}^5\mathbf{R}_6 = ({}^4\mathbf{R}_5)^T ({}^3\mathbf{R}_4)^T ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{o} \ \mathbf{a}]$$

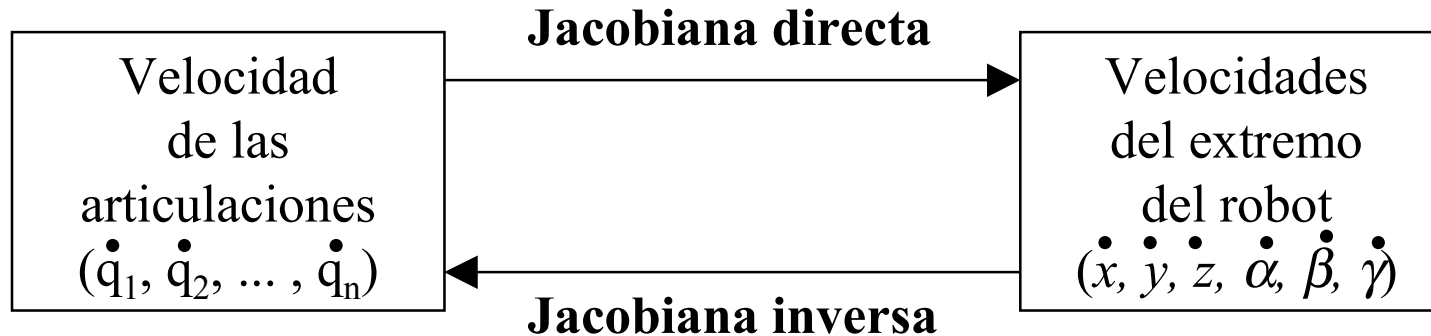
↓

$$\boxed{\theta_5 = \arctan \frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - S_{23} C_4 a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z}}$$

$$\boxed{\theta_6 = \arctan \frac{-(C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) n_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) n_y + S_{23} S_4 n_z}{-(C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4) o_x + (C_1 C_4 - S_1 C_{23} S_4) o_y + S_{23} S_4 o_z}}$$



# Matriz Jacobiana



$$\dot{q}_1 = f_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

$$\dot{q}_2 = f_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

· ·

· ·

· ·

$$\dot{q}_n = f_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

$$\dot{x} = f_x(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\dot{y} = f_y(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\dot{z} = f_z(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\dot{\alpha} = f_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\dot{\beta} = f_\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\dot{\gamma} = f_\gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$



## Jacobiana directa

$$\begin{aligned}x &= f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) & y &= f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) & z &= f_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \alpha &= f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) & \beta &= f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) & \gamma &= f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{y} &= \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{z} &= \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\alpha} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\beta} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\gamma} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz Jacobiana}$$



## Jacobiana inversa

- **Inversión simbólica de la matriz Jacobiana:**
  - Gran complejidad: matriz 6x6 de funciones trigonométricas.
- **Evaluación e inversión numérica de la matriz Jacobiana:**
  - Necesidad de recómputo continuo.
  - En ocasiones  $\mathbf{J}$  no es cuadrada  $\langle$  Matriz pseudoinversa  $(\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$ .
  - En ocasiones el determinante de  $\mathbf{J}$  es nulo: configuraciones singulares.
- **A partir del modelo cinemático inverso:**

$$\begin{array}{l} q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\ \vdots \\ q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \end{array} \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$



# Configuraciones singulares

- Jacobiano (determinante de la matriz jacobiana) nulo.
- Incremento infinitesimal en coordenadas cartesianas implica incremento infinito en coordenadas articulares.
- Implica pérdida de algún grado de libertad.
- Tipos:
  - En los límites del espacio de trabajo del robot.
  - En el interior del espacio de trabajo del robot.
- Requieren su estudio y eliminación.

