# Cinemática del Robot

• La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia.

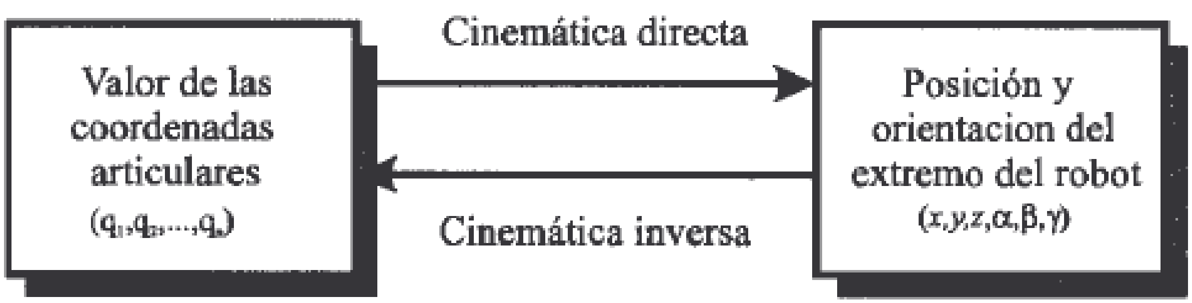
• En primer término, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas en las articulaciones. El método más utilizado aquí es el de Denavit y Hartenberg, quienes propusieron una forma de describir y representar la geometría espacial de los elementos de una "cadena cinemática" de un robot, con respecto a un sistema de referencia fijo, mediante una matriz de transformación homogénea.

• En segundo término, la cinemática se preocupa de encontrar las relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo. En este caso se utiliza el "modelo diferencial" expresado mediante una matriz Jacobiana.

• Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot:

  • Problema cinemático directo: consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, si se conocen los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot

  • Problema cinemático inverso: permite resolver la configuración geométrica que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas.

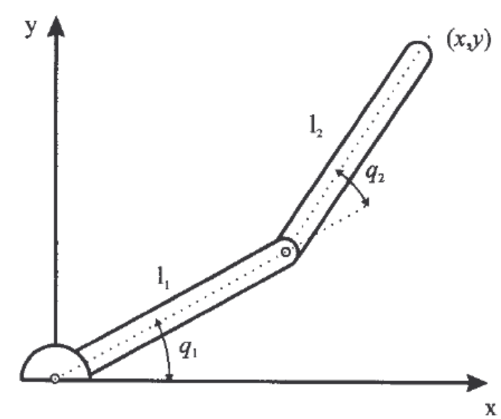


# Cinemática Directa

- Un robot se puede considerar como una <u>cadena cinemática</u> formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí, mediante articulaciones. En esta situación se puede establecer un sistema de referencia fijo en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia.
- El problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación homogénea T que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto del sistema de referencia fijo, situado en la base del mismo.
- En general, un robot de <u>n grados de libertad</u> está formado por <u>n eslabones unidos</u> por <u>n articulaciones</u>, de forma que cada par "articulación-eslabón" constituye un grado de libertad.
- A cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia solidario a él.
- Mediante las matrices de transformación homogéneas es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el robot. Normalmente, la matriz de transformación homogénea se suele denominar matriz ${}^{i-1}A_i$ que representa la posición y orientación del sistema de referencia solidario del eslabón i con respecto al sistema de referencia solidario al eslabón i-1. Para facilidad de notación, se define la matriz ${}^{0}A_k$ como la resultante del producto de las matrices ${}^{i-1}A_i$ desde i=1 a i=k. Si se consideran todos los grados de libertad de un robot (sean éstos p) entonces se tiene que la matriz homogénea T general se obtiene como:

$$\mathbf{T} = {}^{0}A_1 * {}^{1}A_2 * {}^{2}A_3 * {}^{3}A_4 * \ldots\ldots * {}^{i-1}A_i * \ldots\ldots\ldots * {}^{p-1}A_p$$

Ejemplo: En un sistema de referencia X-Y, se tiene un brazo con dos grados de libertad, identificado por los eslabones $l_1$ e $l_2$ y los ángulos $q_1$ y $q_2$.




Se puede determinar que las coordenadas x, y resultan ser:

$x = l_1 * \cos(q_1) + l_2 * \cos(q_1 + q_2)$

$y = l_1 * \mathrm{sen}(q_1) + l_2 * \mathrm{sen}(q_1 + q_2)$

y por lo tanto, la matriz homogénea general será:

$$\mathbf{T} = {}^{0}A_1 * {}^{1}A_2$$

# Cinemática Directa

- Una forma simple para describir la relación que existe entre dos elementos contiguos fue propuesta en 1955 por Denavit y Hartenberg (D-H). Según la representación D-H, si se escoge adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón (sea $S_i$ el sistema de referencia ligado al eslabón i) entonces es posible pasar de un eslabón al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón. Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento i, con el sistema del elemento i-1. Las transformaciones en cuestión son las siguientes y deben hacerse en este orden:
    1. rotación alrededor del eje $Z_{i-1}$ un ángulo $\theta_i$
    2. traslación a lo largo del eje $Z_{i-1}$ una distancia $d_i$ ===> vector $\mathbf{d}_i(0,0,d_i)$
    3. traslación a lo largo del eje $X_i$ una distancia $a_i$ ===> vector $\mathbf{a}_i(0,0,a_i)$
    4. rotación alrededor del eje $X_i$ un ángulo $\alpha_i$

Las transformaciones antes indicadas se pueden expresar mediante las siguientes matrices homogéneas:

$$^{i-1}A_i = \mathbf{T}(\mathbf{Z}, \theta_i) * \mathbf{T}(\mathbf{d_i}) * \mathbf{T}(\mathbf{a_i}) * \mathbf{T}(\mathbf{X}, \alpha_i)$$

$$^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los valores $\theta_i$ , $a_i$ , $d_i$ , $\alpha_i$ se denominan parámetros D-H del eslabón i. De este modo, basta con identificar tales parámetros para obtener las matrices **A** y relacionar así todos y cada uno de los eslabones del robot.

La matriz $^{i-1}A_i$ relaciona los sistema de referencia $S_i$ y $S_{i-1}$ y es necesario que los sistemas de referencia se hayan escogido de acuerdo a ciertas normas. Estas, junto con los parámetros D-H, conforman el siguiente algoritmo para la resolución del problema cinemático

# Cinemática Directa-Algoritmo de Denavit-Hartenberg

**D-H 1**: numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y finalizando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

**D-H 2**: numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y finalizando en n.

**D-H 3**: localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

**D-H 4**: para i de 0 a n-1, situar el eje $Z_i$ sobre el eje de la articulación i+1.

**D-H 5**: situar el origen del sistema de la base ($S_0$) en cualquier punto del eje $Z_0$. Los ejes $X_0$ e $Y_0$ se situarán de modo que formen un "sistema dextrógiro" (giro a la derecha) con el eje $Z_0$

**D-H 6**: para i de 1 a n-1, situar el sistema $S_i$ (solidario al eslabón i) en la intersección del eje $Z_i$ con la línea normal común a los ejes $Z_{i-1}$ y $Z_i$. Si ambos ejes se cortasen, se situaría el sistema $S_i$ en el punto de corte. Si fuesen paralelos, el sistema $S_i$ se situaría en la articulación i+1

**D-H 7**: situar el eje $X_i$ en la línea normal común a los ejes $Z_{i-1}$ y $Z_i$

**D-H 8**: situar $Y_i$ de modo que forme un sistema dextrógiro con los ejes $X_i$ y $Z_i$

**D-H 9**: situar el sistema $S_n$ en el extremo del robot de modo que $Z_n$ coincida con la dirección de $Z_{n-1}$ y que $X_n$ sea normal a $Z_{n-1}$ y $Z_n$

**D-H 10**: obtener $\theta_i$ como el ángulo que hay que girar en torno al eje $Z_{i-1}$ para que los ejes $X_{i-1}$ y $X_i$ queden paralelos.

**D-H 11**: obtener $d_i$ como la distancia, medida a lo largo del eje $Z_{i-1}$, que habría que desplazar el sistema $S_{i-1}$ para que los ejes $X_i$ y $X_{i-1}$ quedasen alineados.

**D-H 12**: obtener $a_i$ como la distancia medida a lo largo del eje $X_i$ (que ahora coincidiría con el eje $X_{i-1}$) que habría que desplazar el nuevo sistema $S_{i-1}$ para que su origen coincidiese con el sistema $S_i$

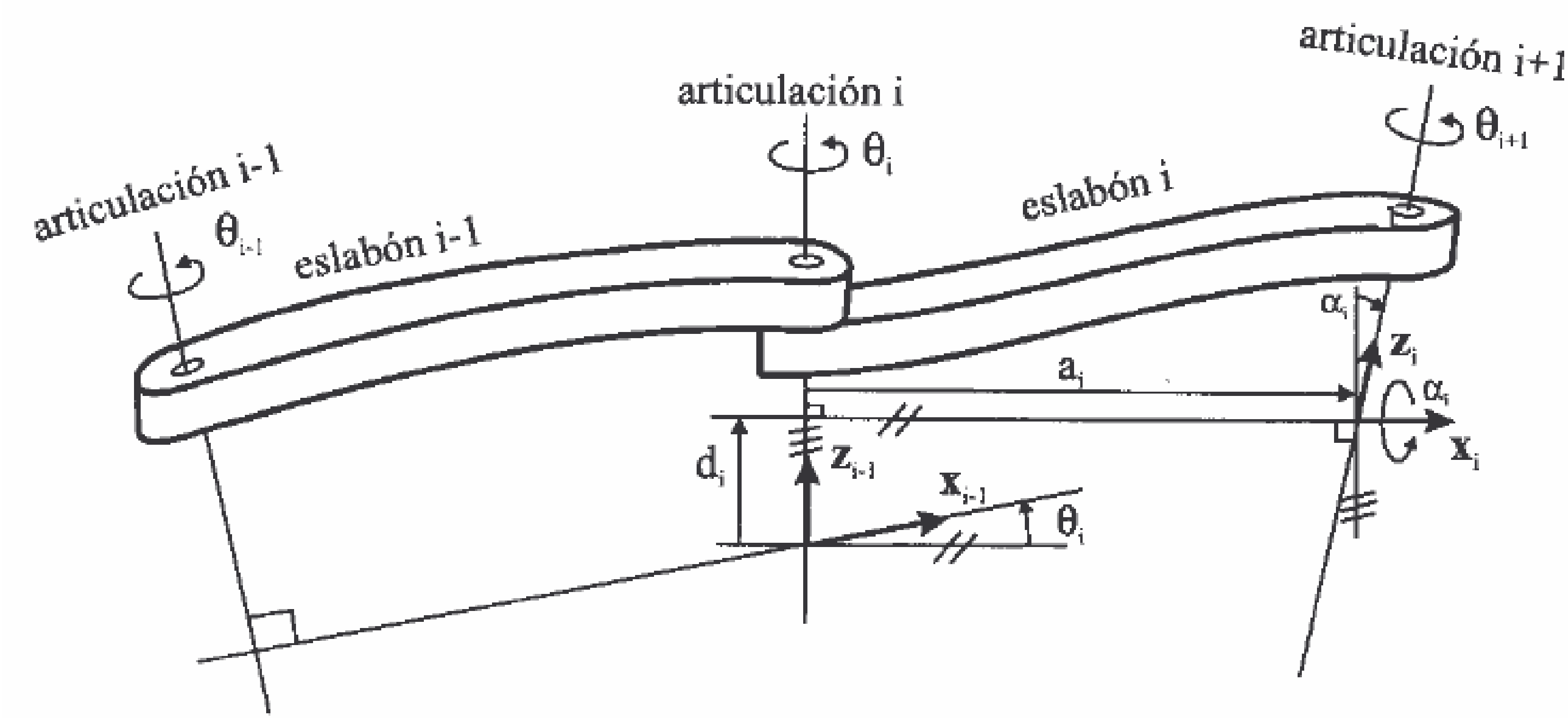
**D-H 13**: obtener $\alpha_i$ como el ángulo que habría que girar entorno al eje $X_i$ (que ahora coincidiría con el eje $X_{i-1}$), para que el nuevo sistema $S_{i-1}$ coincidiese totalmente con el sistema $S_i$

**D-H 14**: obtener las matrices de transformación $^{i-1}A_i$

**D-H 15**: obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot, esto es, $\mathbf{T} = {}^{0}A_1 * {}^{1}A_2 * {}^{2}A_3 \ldots\ldots * {}^{n-1}A_n$

**D-H 16**: la matriz **T** define la orientación y posición del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares

# Cinemática Directa




$\theta_i$ es el ángulo que forman los ejes $X_{i-1}$ y $X_i$ medido en un plano perpendicular al eje $Z_{i-1}$, utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

**$d_i$** es la distancia a lo largo del eje $Z_{i-1}$ desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje $Z_{i-1}$ con el eje $X_i$. Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

**$a_i$** es la distancia a lo largo del eje $X_i$ que va desde la intersección del eje $Z_{i-1}$ con el eje $X_i$ hasta el origen del sistema i-ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes $Z_{i-1}$ y $Z_i$

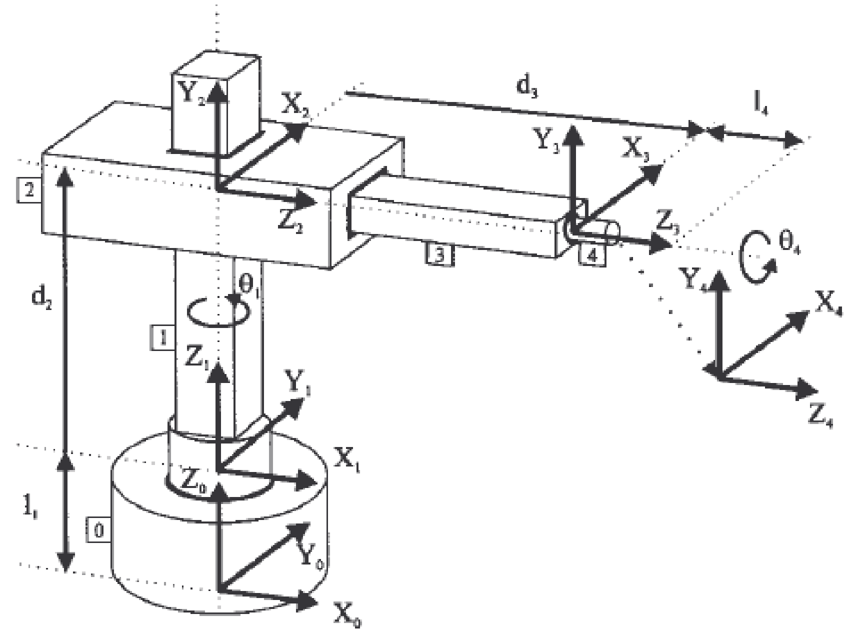
**$\alpha_i$** es el ángulo de separación del eje $Z_{i-1}$ y el eje $Z_i$, medido en un plano perpendicular al eje $X_i$, utilizando la regla de la mano derecha.

# Cinemática Directa

## EJEMPLO 1

Vamos a aplicar el método D-H a un robot de tipo cilíndrico indicado en la figura.

En primer lugar se localizan los sistemas de referencia de cada una de las articulaciones del robot. A continuación se determinan los parámetros D-H del robot y se construye la siguiente tabla:




| Articulación | θ | d | a | α |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\theta_1$ | $l_1$ | 0 | 0 |
| 2 | 90º | $d_2$ | 0 | 90º |
| 3 | 0 | $d_3$ | 0 | 0 |
| 4 | $\theta_4$ | $l_4$ | 0 | 0 |

Una vez calculados los parámetros de cada eslabón, se calculan las matrices A, sustituyendo en la expresión general de la siguiente manera:

$$^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C_i} = \cos(\theta_i)$ $\mathbf{S_i} = \mathrm{sen}(\theta_i)$

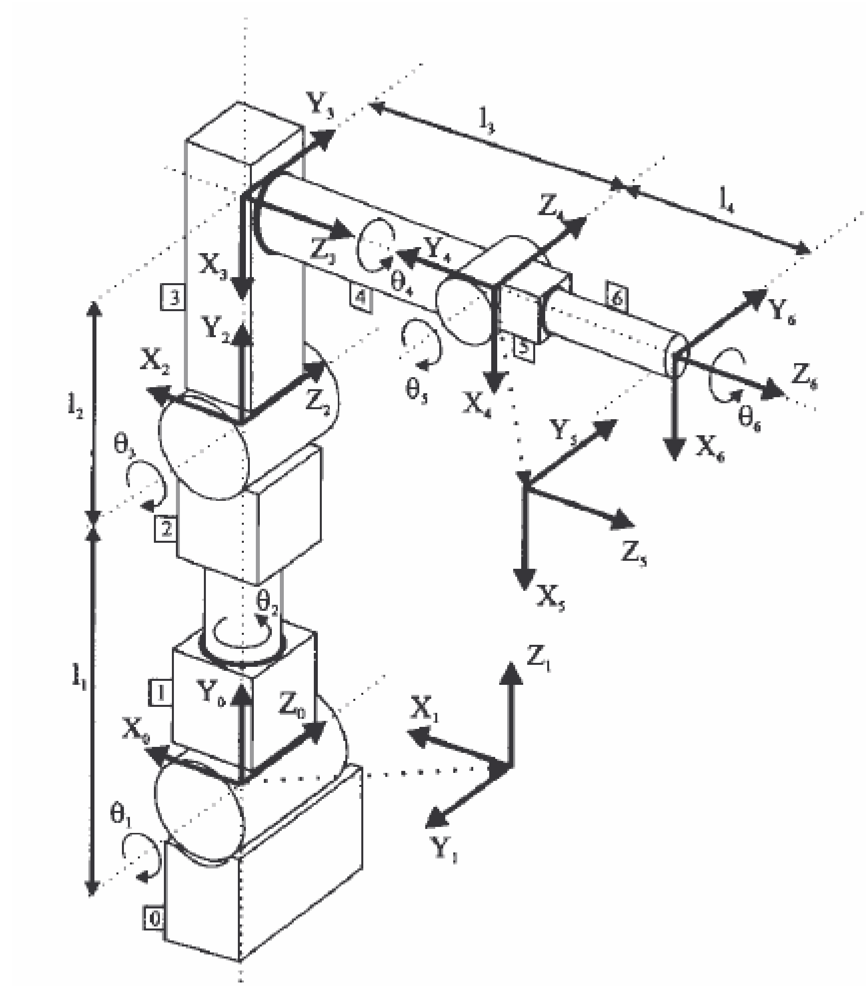
Con estas matrices podemos calcular la matriz homogénea general T:

$$\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1\, {}^{1}\mathbf{A}_2\, {}^{2}\mathbf{A}_3\, {}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -S_1C_4 & S_1S_4 & C_1 & C_1(d_3+l_4) \\ C_1C_4 & -C_1S_4 & S_1 & S_1(d_3+l_4) \\ S_4 & C_4 & 0 & d_2+l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Cinemática Directa

## EJEMPLO 2

Se localizan los sistemas de referencia de cada una de las articulaciones del robot. A continuación se determinan los parámetros D-H del robot y se construye la siguiente tabla:




| **Articulación** | **θ** | **d** | **a** | **α** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $\theta_1$ | 0 | 0 | -90º |
| **2** | $\theta_2$ | $l_1$ | 0 | 90º |
| **3** | **$\theta_3$-90** | 0 | l2 | 90º |
| **4** | $\theta_4$ | $l_3$ | 0 | -90º |
| **5** | $\theta_5$ | 0 | 0 | 90º |
| **6** | $\theta_6$ | $l_4$ | 0 | 0 |

Una vez calculados los parámetros de cada eslabón, y tal como se hizo en el ejemplo 1, se calculan las matrices ${}^0A_1$, ${}^1A_2$, ${}^2A_3$ , ${}^3A_4$, ${}^4A_5$, ${}^5A_6$

Con estas matrices podemos calcular la matriz homogénea general T:

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1\,{}^1\mathbf{A}_2\,{}^2\mathbf{A}_3\,{}^3\mathbf{A}_4\,{}^4\mathbf{A}_5\,{}^5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Cinemática Directa

Las componentes de las matriz T se describen a continuación:

$$
\begin{aligned}
n_x &= (C_1C_2S_3 + S_1C_3)(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_1S_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-C_1C_2C_3 + S_1S_3)S_5C_6 \\
n_y &= (-S_1C_2S_3 + S_1C_3)(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + S_1S_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_5C_6 \\
n_z &= (-S_2S_3)(C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_2(S_4C_5C_6 + C_4S_6) + S_2C_3S_5C_6 \\
o_x &= (C_1C_2S_3 + S_1C_3)(-C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_1S_2(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-C_1C_2C_3 + S_1S_3)(-S_5C_6) \\
o_y &= (-S_1C_2S_3 + S_1C_3)(-C_4C_5C_6 - S_4S_6) + S_1S_2(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) + (-S_1C_2C_3 - C_1S_3)(-S_5C_6) \\
o_z &= (-S_2S_3)(-C_4C_5C_6 - S_4S_6) + C_2(-S_4C_5C_6 + C_4S_6) + S_2C_3(-S_5C_6) \\
p_x &= (C_1C_2S_3 + S_1C_3)(l_4C_4S_5) + C_1S_2(l_4S_4S_5) + (C_1C_2C_3 + S_1S_3)(-l_4C_5 + l_3) + \\
&\qquad (-l_2C_1C_2S_3 - l_2S_1C_3 - l_1S_1) \\
p_y &= (-S_1C_2S_3 - C_1C_3)(l_4C_4S_5) + S_1S_2(l_4S_4S_5) + (-C_1C_2C_3 - C_1S_3)(-l_4C_5 + l_3) + \\
&\qquad (-l_2S_1C_2S_3 - l_2C_1C_3 + l_1C_1) \\
p_z &= (-S_2S_3)(l_4C_4C_5) + C_2(l_4S_4S_5) + S_2C_3(-l_4C_5 + l_3) + l_2S_2S_3
\end{aligned}
$$

$\mathbf{C_i} = \cos(\theta_i)$ $\mathbf{S_i} = \mathrm{sen}(\theta_i)$

Notar que en la matriz T anterior, se describe completamente las coordenadas de la posición ($p_x$, $p_y$, $p_z$) así como de la orientación ($n_x$, $n_y$, $n_z$, $o_x$, $o_y$, $o_z$) del extremo del brazo.